Exercice 1

Dire en justifiant si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

a) La somme, le produit de deux nombres rationnels, l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.

b) La somme, le produit de deux nombres irrationnels est un irrationnel.

c) La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un irrationnel.

d) Le produit d'un nombre rationnel par un nombre irrationnel est un irrationnel.

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}$, on rappelle x est rationnel si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$. On montre dans ces conditions qu' il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.

a) C'est vrai(il suffit de l'écrire).

b) C'est faux. Ainsi si $x = -y = \sqrt{2}$, alors $x + y = 0 \in \mathbb{Q}$, et $xy = -2 \in \mathbb{Q}$.

c) C'est vrai. Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et soit $z = x + y$. Par l'absurde, supposons que $z \in \mathbb{Q}$ alors : $y = z - x \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas. Ainsi $z \notin \mathbb{Q}$.

d) C'est faux. Ainsi si $x = 0$ et $y \notin \mathbb{Q}$, alors $z = xy = 0 \in \mathbb{Q}$. Par contre, si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, le résultat est vrai. En effet par l'absurde, si on avait $z = xy \in \mathbb{Q}$ avec $x \neq 0$, on aurait $y = z\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas.

Exercice 2

a) Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

b) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

c) Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrrationnel.

d) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$.
Que penser de l'assertion : $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{2} + d\sqrt{3} \Longrightarrow a = c$ et $b = d$?

Solution

a) Par l'absurde, si $\sqrt{3}$ était dans $\mathbb{Q}$, il existerait $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec (p, q) premiers ente eux. En élévant au carré, on aurait : $(\star)$ $p^2 = 3q^2$ et 3 diviserait p^2.
Comme 3 est premier, 3 diviserait p d'où l'existence de $p' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 3p'$. En reportant dans l'égalité $(\star)$, on aurait $3p'^2 = q^2$ donc 3 diviserait q, ce qui contredit (p, q) premiers ente eux.
La contradiction assure que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

b) Par l'absurde, si $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ était rationnel, alors son carré le serait, donc $5 + 2\sqrt{6}$ serait dans $\mathbb{Q}$. Il en découlerait que $\sqrt{6}$ serait dans $\mathbb{Q}$. On adapte alors la preuve faite en a) pour montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel, ce qui établit la contradiction et établit le résultat.

c) Toujours par l'absurde si $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est rationnel, alors . il existerait $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$
On a alors $q \ln 2 = p \ln 3$ donc $\ln(2^q) = \ln(3^p)$. Par injectivité de la fonction ln, il en résulte que $2^q = 3^p$. Or q est non nul donc 2^q est pair et 3^p est impair d'où la contradiction (aucun entier n'est pair et impair). Ainsi $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrrationnel.

d) Elle est juste.

Il suffit pour la valider de montrer que pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$, l'égalité $\alpha\sqrt{2}+\beta\sqrt{3} = 0$ implique : $\alpha = \beta = 0$.

Supposons que : (1) $\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{3} = 0$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$.

Par passage au carré, on obtient : $2\alpha^2 + 3\beta^2 = -2\alpha\beta\sqrt{6}$.

Par l'absurde, si $\alpha\beta \neq 0$ alors on aurait : $\sqrt{6} = -\dfrac{2\alpha^2 + 3\beta^2}{2\alpha\beta} \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas. Ainsi $\alpha\beta = 0$.

Mézalors, $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ et il en découle en reportant dans (1) que $\alpha = \beta = 0$.